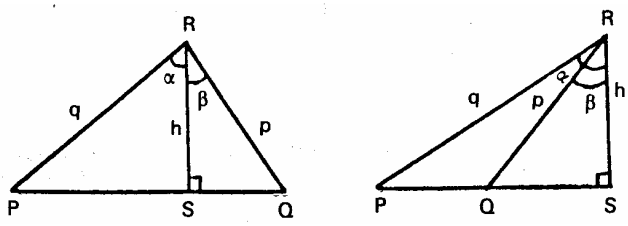
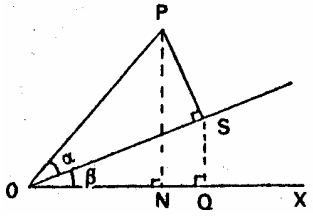
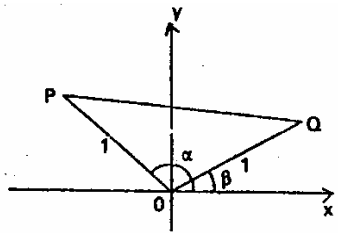
单元 **4**：三角

特定目标：

1. 理解任意角的六个三角函数及其图像。
2. 理解及应用复角公式及和积互变公式。
3. 计算三角方程的通解。
4. 掌握解二维及三维空间较难问题的技巧。

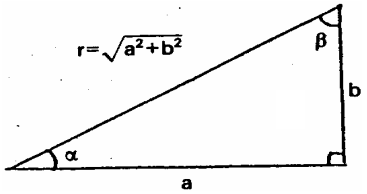
内容	时间分配	教学建议
4.1 弧度法	2*	学生应已明白弧度的意义。他们应能推导 $s = r\theta$ 及 $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ 两条公式和计算弧长及扇形面积。 学生应能掌握角度与弧度的换算。计算三角函数和涉及弧度的公式应有足够的练习。
4.2 任意角的六个三角函数及其图形	4* + 4	学生应已熟习正弦、余弦和正切函数及其在 0 至 2π 区间内的图像。这些函数的定义域可伸展至实数全集。 学生可发现正弦、余弦和正切都是周期函数而其周期分别是 2π、2π 和 π。教师可用单位圆来定义余割、正割和余切。 学生应知道 $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ 及 $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

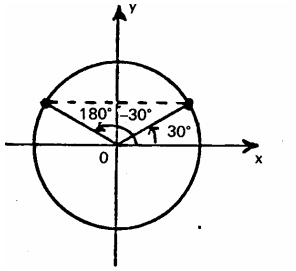
内容	时间分配	教学建议
4.3 复角	10	教师应指示出如何去化简角是 $\frac{n\pi}{2} \pm \theta$（n 是偶数或奇数）的六个三角函数。应给予学生涉及关系式和恒等式的分类练习。 相信学生亦可发现余割、正割和余切都是周期函数而其周期分别是 2π、2π 和 π。 *例一* 证明恒等式 $\sec^2\theta\ \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta$。 *例二* 已知 $\frac{\sin^2\theta}{1+2\cos^2\theta} = \frac{3}{19}$，且 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$，试求 $\frac{\sin\theta}{1+2\cos\theta}$ 的值。 教师可利用下列图中三角形 PQR 的面积来介绍 $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ 的公式： 

内 容	时间分配	教 学 建 议
		教师亦可利用线段 OP 在线 OX 的投映来显示 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，  或应用余弦公式(如学生已学习此公式)于下图三角形 OPQ 来显示 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 。  学生应注意 $\sin(A\pm B)$及 $\cos(A\pm B)$ 的公式对任意角 A 和 B 都成立。教师应提供足够例子及练习给学生以使他们熟习这些公式，并可鼓励学生自己推出下列的公式。 $\tan(A\pm B)=\dfrac{\tan A\pm\tan B}{1-\tan A\tan B}$ 及和差与积互化公式 $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$ $2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$

内 容	时间分配	教 学 建 议
		$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$ $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$ $\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$ $\sin x-\sin y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$ $\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$ $\cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$ 其它有关公式亦可推出。 二倍角公式 $\sin 2A=2\sin A\cos A$ $\cos 2A=\cos^2A-\sin^2A=2\cos^2A-1=1-2\sin^2A$ $\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ $\sin^2 A=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2A)$ $\cos^2 A=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2A)$ 三倍角公式 $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3A$ $\cos 3A=4\cos^3A-3\cos A$ $\tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$ 半倍角公式 $\sin\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$

内 容	时间分配	教 学 建 议
		$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ $\tan\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ $\tan\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ 教师应强调这些公式的应用。下列的例子可加阐释： *例一* 运用 $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$，求证 $\tan\frac{\pi}{8}$ 是方程 $x^2+2x-1=0$ 的根，从而求出 $\tan\frac{\pi}{8}$ 的根式值。 *例二* 解方程 $\cos 2x+2\cos^2\frac{x}{2}=1$，其中 $0\le x\le 2\pi$。 *例三* 试以 $\frac{\theta}{2}$ 表示 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$，由此求出 $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ 和 $\tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}$，其中 $t=\tan\frac{\theta}{2}$。 由此，解方程 $\frac{3\cos\theta+4\sin\theta}{3-5\sin\theta}=3$，其中 $0°\le\theta\le 180°$。 *例四* 求证 $\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta+\cos 7\theta=\frac{\sin 8\theta}{2\sin\theta}$，其中 $\sin\theta\ne 0$。

内 容	时间分配	教 学 建 议
4.4 补助角的形式	2	教师可从这例子引导学生先去探究数式 $2\sin\theta(\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta+\cos 7\theta)$ 及说明下列三角级数的和亦可用同样的方法处理 $C=\cos\theta+\cos(\theta+\alpha)+\cos(\theta+2\alpha)+\cdots+\cos(\theta+n\alpha)$ 和 $S=\sin\theta+\sin(\theta+\alpha)+\sin(\theta+2\alpha)+\cdots+\sin(\theta+n\alpha)$ *例五* 解下列方程，其中 $0°\le\theta\le 360°$： (*a*) $\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta=0$ (*b*) $\cos 3\theta\cos 8\theta+\sin 4\theta\sin 7\theta=0$ 教师可要求学生将 $r\cos(\theta-\alpha)$化为 $a\cos\theta+b\sin\theta$ 的形式。然后，学生应不难看出 $a=r\cos\alpha$ 和 $b=r\sin\alpha$。逆算时，数式 $a\cos\theta+b\sin\theta$ 可写作 $r\cos(\theta-\alpha)$ 的形式，其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ 及 $\tan\theta=\frac{b}{a}$。教师可用下面的直角三角形来阐明上述的概念：  教师应补充说明数式 $a\cos\theta+b\sin\theta$ 亦可利用余角 $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ 来写为 $r\sin(\theta+\beta)$ 的形式。因正弦或余弦函数的值只是由−1 至 1，学生应不难明白 $-r\le r\cos(\theta-\alpha)\le r$ 及 $-r\le r\sin(\theta+\alpha)\le r$。 教师可和学生讨论 $y=a\cos\theta+b\sin\theta$ 图像的形状。可介绍类似下列的例子。

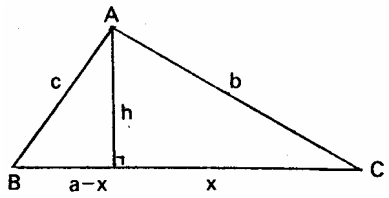
内 容	时间分配	教 学 建 议
4.5 三角方程的通解	4	*例一* (*a*) 若 $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$ 其中 $r>0$ 和 $0°\le\alpha\le 90°$，试求 r 及 α。 (*b*) 若 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3\sin\theta+\cos\theta+7}}$，利用(*a*)的结果，试求 y 值的值域。 *例二* 设 $f(\theta)=12\sin\theta-5\cos\theta+8$。 (*a*) 试将 $f(\theta)$化为 $r\sin(\theta-\alpha)+c$ 的形式，其中 r，α和 c 是常数及 $0°\le\theta\le 90°$。 (*b*) 利用(*a*)部的结果，或其它方法，试求 $f(\theta)$的最小值。 教师可要求学生列出方程 $\sin\theta=\sin 30°$ 的所有解。学生应知道$\theta=30°$是 θ 的其中一个解，而 $180°-30°$，$360°+30°$，$540°-30°$，… 是其它可能的解。 教师应引导学生去结合上述结果为两组： $\theta=2n(180°)+30°$ 和 $\theta=(2n-1)(180°)-30°$ 及 简化为单一的公式 $\theta=n\cdot(180°)+(-1)^n(30°)$，其中 n 是整数。 

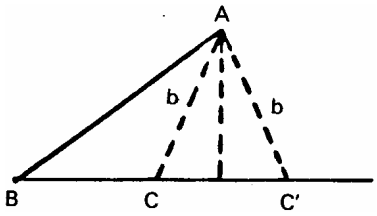
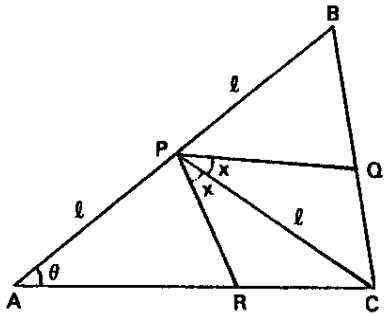
29

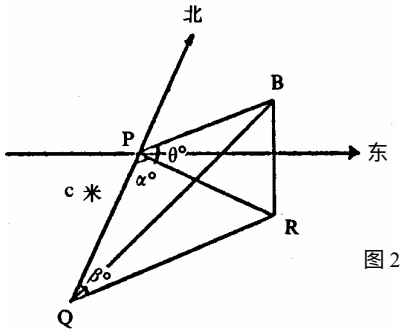
内 容	时间分配	教 学 建 议
		在这阶段，学生应不难知道 $\sin\theta=\sin\alpha$ 的通解是 $\theta=n\cdot(180°)+(-1)^n\alpha$。 教师应和学生讨论如何求出 $\cos\theta=\cos\alpha$ 的通解和总结 $\theta=n\cdot(360°)\pm\alpha$。 同样地，$\tan\theta=\tan\alpha$ 的通解是 $\theta=n\cdot 180°+\alpha$。 教师宜将上述三个结果同时以弧度表示。 $\theta=n\pi+(-1)^n\alpha$ 若 $\sin\theta=\sin\alpha$ $\theta=2n\pi\pm\alpha$ 若 $\cos\theta=\cos\alpha$ $\theta=n\pi+\alpha$ 若 $\tan\theta=\tan\alpha$ 应提醒学生不要将弧度和度在同一公式中混合使用。他们可用反函数的记法，例如 $\theta=n\pi+(-1)^n\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ 来表示。 以下的例子可供参考。 *例一* 试求 $\cos^2 y=\frac{1}{2}$ 的通解。 从原式可得出 $\cos y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 而解是 $y=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$ 和 $2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}$ 其中 n 是整数。对能力较高的学生，可重新安排答案如下： 对 $y=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$， $y=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$，其中 k 是偶数或零。 对 $y=2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}$， $y=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$，其中 k 是奇数。 联合后，解为 $y=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$，其中 n 是整数。

30

内 容	时间分配	教 学 建 议
		例二 求 $2\cos\theta = \cot\theta$ 的通解。 学生或会忽略 $\cos\theta = 0$ 是其中一个解。教师应提醒学生不要消去可能是零的因式。 *例三* 求 $\cos 3\theta = \sin\theta$ 的通解。 可用正弦或余弦的方法来解。用正弦的方法，可得 $\theta = 180°n + (-1)^n(90° - 3\theta)$ 及用余弦的方法，可得 $3\theta = 360°n \pm (90° - \theta)$ 。故利用余弦的公式较易处理。 *例四* 求 $\sin 2x + \sin 4x = \cos x$ 的通解。 可利用恒等式 $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ ， 将方程写为 $2\sin 3x\cos x = \cos x$ 的形式。 *例五* 求 $2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2} = 1$ 的通解。 可利用恒等式 $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ 可[redacted]解这方程。 *例六* 求 $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = 1$ 的通解。 解方程时，学生可先将 $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta$ 化为 $r\sin(\theta+\alpha)$ 或 $r\cos(\theta-\alpha)$ 的形式。
4.6 三角形的解法	10*	有关解三角形的数学问题需要应用正弦和余弦公式。对一任意锐角三角形 ABC，学生应不难利用下图，推导出 $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ 和 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$。

内 容	时间分配	教 学 建 议
		 这些公式可伸延及应用于任意三角形，包括钝角三角形。其次，正弦公式亦可由一个任意三角形及其外接圆推导出来。至于余弦公式，除了运用勾股定理外，亦可从下列三恒等式中推出。 $a = b\cos C + c\cos B$ $b = a\cos C + c\cos A$ $c = b\cos A + a\cos B$ 在这情况下，学生应注意勾股定理是余弦公式的特殊情况。 应提供学生足够的例子及习作。解三角形的习作亦应包括下列的情况： (1) 任意两个角和一条边 (2) 任意两条边及其中一边的对角 (3) 任意两条边及其夹角 (4) 任意三条边 学生应能选择及应用适合的公式。教师亦应利用例子详加解释两义情况。下图对此会有帮助。

内容	时间分配	教学建议
		 c>b>csinB
4.7 二维及三维空间问题	4	教师应介绍较艰深的问题，包括有关复角及任意三角比的问题。 应鼓励学生在解问题前，先描绘有关图形。金属线模型或立体模型对解释及说明会有帮助。 足够的例子及练习可帮助学生掌握解有关问题的技巧。 *例一* 在下图，ABC 是一三角形而 $\angle A = \theta$。P 是在 AB 的点而 $PA = PB = PC = \ell$。R 及 Q 是分别在 AC 及 BC 的点，而 $\angle QPC = \angle RPC = x$。 

内容	时间分配	教学建议
		(*a*) 试证 $PR = \dfrac{\ell \sin\theta}{\sin(x+\theta)}$。 (*b*) 试以 θ 表 ∠PCQ 并由此以 ℓ、x、θ 表 PQ。 (*c*) 试证 ΔPQR 的面积为 $\dfrac{\ell^2 \sin\theta\cos\theta\sin 2x}{2\sin(x+\theta)\cos(x-\theta)}$，且该面积可表示成 $\dfrac{\ell^2 \sin 2\theta}{2}\left(1-\dfrac{\sin 2\theta}{\sin 2x+\sin 2\theta}\right)$。 ····· (*) (*d*) (i) 若 $\theta=\dfrac{\pi}{8}$，求 x 值的可能范围。由此，利用(*)推出 ΔPQR 的极大面积，并以 ℓ 表之。 (ii) 若 $\theta=\dfrac{\pi}{12}$，x 值的可能范围为何？ 试以 ℓ 表 ΔPQR 的极大面积。 *例二*  图 2

内 容	时间分配	教 学 建 议
		一汽球 B 由平地上两点 P、Q 同时观察，P 在 Q 的北面及相距 c 米。从 P 及 Q 两点测得汽球的方位角分别为 Sα°E 及 Nβ°E。从 P 点测得 B 的仰角为 θ°。R 是 B 点在地上的投影(见图)。 (*a*) 试证当汽球在高度 h 米时， $h = \frac{c \tan\theta° \sin\beta°}{\sin(\alpha° + \beta°)}$。 (*b*) 已知 $\theta = 40$，$\alpha = 54$ 及$\beta = 46$， (i) 试求从 θ 点测得 B 的仰角； (ii) 设 M 是 PQ 的中点，试求从 M 点测得 B 的仰角和方位角。
	16*+24	