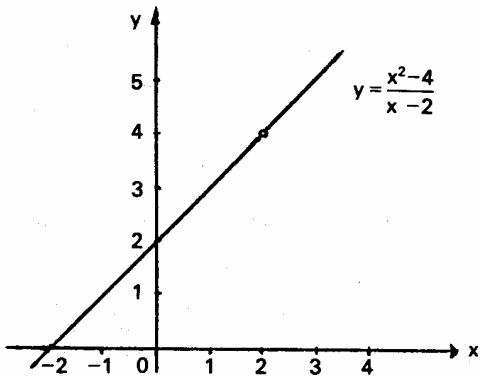
单元 **5**：极限和微分

特定目标：

1. 学习极限的概念。
2. 计算函数的极限。
3. 求函数的导数。
4 利用微分法的技巧解数学问题。

内容	时间分配	教学建议
5.1 极限	5	教师应复习函数的概念和记法。函数 f(x)在 x_0 的极限可视为当 x 趋近于 x_0 时 f(x)所趋近的数值。教师可指出函数 f(x)在 $x = x_0$ 时的极限是 $f(x_0)$当且仅当函数在 $x = x_0$ 时是连续的，但不需对函数的连续性作严谨的处理。教师应介绍 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)$ 等符号，并应和学生讨论简易代数函数的极限和趋向无穷时简易有理函数的极限。亦应介绍一些如下的例题以便澄清极限的概念。 *例一* 描绘 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 的图像并考虑当 x 趋向 2 时 $f(x)$ 的值。 教师可让学生列出下表并描绘 $f(x)$ 的图像：

x	0	1	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	3
f(x)	2	3	3.9	3.99	3.999	未下定义	4.001	4.01	4.1	5

内容	时间分配	教学建议
		 当 x 越来越接近 2 时，$f(x)$ 越来越接近 4 并记为 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$ 或 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$ 除了$(2,4)$一点外，很明显，$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 的图像是和 $y = x+2$ 一样的。当 x 从两方面迫近 2 时，可记作 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$ 但教师应强调 f(x)在 x = 2 时是没有定义的。

内容	时间分配	教学建议

例二

试求 $\lim\limits_{x\to 2} x^2$ 。

由于函数 $f(x)=x^2$ 在 $x=2$ 时是连续的，所以极限等如 $f(2)$。

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$$ 。

教师可用图像和数字说明。

例三

试求 $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt{x+1}-3}$ 。

教师应提醒学生把根式有理化的技巧：

$$\begin{aligned}\frac{x-8}{\sqrt{x+1}-3} &= \frac{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)}{(\sqrt{x+1}-3)(\sqrt{x+1}+3)}\\ &= \frac{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)}{(x+1)-9}\\ &= \sqrt{x+1}+3\end{aligned}$$

由此 $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt{x+1}-3} = \lim\limits_{x\to 8}(\sqrt{x+1}+3) = 6$

学生应知道 $\dfrac{x-8}{\sqrt{x+1}-3}$ 在 $x=8$ 时是没有定义的。

例四

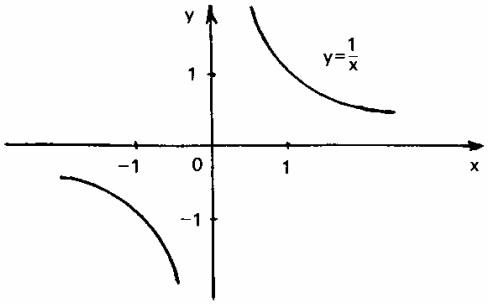
考虑当 x 趋向无穷大时 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的极限。

教师可介绍记号 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$。

内 容	时 间 分 配	教 学 建 议

学生应能列出下表和描绘 $\dfrac{1}{x}$ 的图像。

x	-100	-10	-1	-0.1	0	0.1	1	10	100	1000
f(x)	-0.01	-0.1	-1	-10	未下定义	10	1	0.1	0.01	0.001



学生应能够看出当 x 趋向无穷大时，$\dfrac{1}{x}$ 趋向 0，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$。教师可同时验证 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 。

下列的定理可应用于计算函数的极限：

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在，则

(*a*) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

(*b*) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

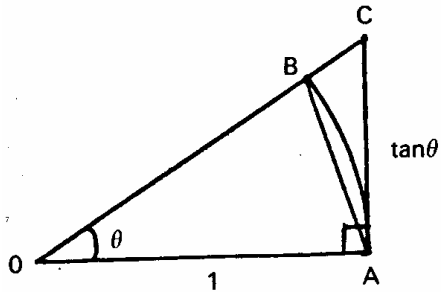
内 容	时 间 分 配	教 学 建 议

(*c*) $\lim\limits_{x\to x_0}[c\cdot f(x)] = c\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，其中 c 为一常数。

(*d*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$。

上述定理并不需要严谨的证明。

当处理三角函数时，而 θ 是以弧度为单位，$\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$ 这个极限是十分有用的。教师可引导学生从下图中比较ΔAOB，扇形 AOB 和 ΔAOC 的面积，然后得出以上的结果。



教师可鼓励学生用计算器逐一计算当θ 的数值递减如 0.1、0.01、0.001 和 0.0001 时 $\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ 的数值，藉以验证 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$。

例题和习作可包括 $\dfrac{\sin 3\theta}{2\theta}$、$\dfrac{\tan\theta}{2\theta}$、$\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}$ 和 $\dfrac{\sin m\theta}{\sin n\theta}$ 其中 m、n 为常数。

内 容	时 间 分 配	教 学 建 议
5.2 导数	4	以记号 Δx 和Δy 表增量，若下列的极限存在，则函数 $y=f(x)$ 的导数可定义为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$。教师应介绍导数的常用记号例如 $f'(x)$、$\dfrac{dy}{dx}$、y'、$\dfrac{d[f(x)]}{dx}$ 和 $\dfrac{d}{dx}[f(x)]$ 等、并应强调 $\dfrac{dy}{dx}$ 是一个记号而不应视为一个分数。教师应举例说明如何从基本原理求导数。例题应包括简单的多项式和 $\dfrac{1}{ax+b}$、$\dfrac{ax+b}{cx+d}$、$\sqrt{ax+b}$ 及 $\dfrac{ax+b}{\sqrt{cx+d}}$ 其中 a、b、c、d 为常数的代数式。至于三角函数的处理方法则可留待介绍了微分法的法则后才作讨论。
5.3 微分法 5.3.1 *简单代数函数和微分法的法则*	4	教师可导出下列微分法的法则，其中 c 为一常数而 u、v 是 x 的函数。 1. $\dfrac{dc}{dx}=0$ 2. $\dfrac{d}{dx}[x^n]=nx^{n-1}$ 其中 n 为一整数(幂规律) 注意： 教师可介绍和利用 n 为正整数的幂规律 $\dfrac{d}{dx}[x^n]=nx^{n-1}$ 而无需证明，但当 n 是一个整数(包括正数和负数)的情况则宜在介绍了商法则之后才作讨论。 3. $\dfrac{d}{dx}[cf(x)]=c\dfrac{d}{dx}[f(x)]$ 4. $\dfrac{d}{dx}[u+v]=\dfrac{du}{dx}+\dfrac{dv}{dx}$ 5. $\dfrac{d}{dx}[u\cdot v]=u\dfrac{dv}{dx}+v\dfrac{du}{dx}$ (积法则)
内 容	时 间 分 配	教 学 建 议

5.3.2 *复合函数和隐函数的微分*	4	6. $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right]=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ (商法则) 教师宜先用多项式作例题，示范如何微分一个常数、x 的乘幂和 x 的乘幂之线性组合等。当学生已熟识了 $n = 0, 1, 2, \cdots$的幂规律 $\frac{d}{dx}[x^n]=nx^{n-1}$，他们已可以把一个多项式逐项微分。当确定了微分函数的和、积和商的法则之后，学生便可以微分多项式的积和有理函数，例如 $(2x+3)(4x^2+5)$ 和 $\frac{1-2x^2}{2+3x}$ 等。 下列的例题亦适用： *例一* n 为一正整数，试从基本原理求 x^n 的导数。 *例二* 已知若 n 为一正整数时 $\frac{d[x^n]}{dx}=nx^{n-1}$，同时若 $f(x)\neq 0$ 则 $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{-\frac{d}{dx}[f(x)]}{[f(x)]^2}$。 证明对所有整数，$\frac{d[x^n]}{dx}=nx^{n-1}$ 正确。 教师应介绍一些复合函数、隐函数和反函数的例子。 教师然后应介绍链式法则: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ 其中 y 是 u 的函数及 u 是 x 的函数。

内 容	时 间 分 配	教 学 建 议
		链式法则是可以用来微分复合函数、隐函数和反函数的。教师应介绍多两个有用的公式 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}$ 及 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ 这些公式不需要严谨的证明但要有充足的应用题。教师可以用链式法则来证明当 n 是一有理数时 $\frac{d}{dx}[x^n]=nx^{n-1}$ 亦成立。在现阶段学生应能运用微分的法则于包括有理指数的代数式，例如$(3x^2+4)^{\frac{5}{2}}$ 或 $x(2x-3)^{-\frac{3}{2}}$ 等。教师可利用 曲线的标准方程或参数方程作为例题和习题。 *例一* 求 $y=(2x^2+1)^5$ 对 x 的导数。 经过一些练习，学生便可以运用链式法则并以下列的方法表达而无需代换 $u=2x^2+1$： $\frac{dy}{dx}=\frac{d(2x^2+1)^5}{d(2x^2+1)}\cdot\frac{d(2x^2+1)}{dx}$ $=5(2x^2+1)^4\cdot 4x$ $=20x(2x^2+1)^4$ *例二* 已知下列参数方程：

内 容	时 间 分 配	教 学 建 议

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases}$$

求 $\frac{dy}{dx}$。

学生应能运用 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$。

例三

求函数 $x^2 + y^2 = 25$ 的 $\frac{dy}{dx}$ 在点 (3, 4) 处的值。

教师可把结果用图解说明。

例四

已知当 n 为任何整数时 $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$。

证明当 $m=\frac{p}{q}$，其中 p、q 为整数且 $q > 0$，$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$。

设 $y = x^n = x^{\frac{p}{q}}$，则 $y^q = x^p$

在方程两边同时对 x 求导数：

$$qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = px^{p-1}$$

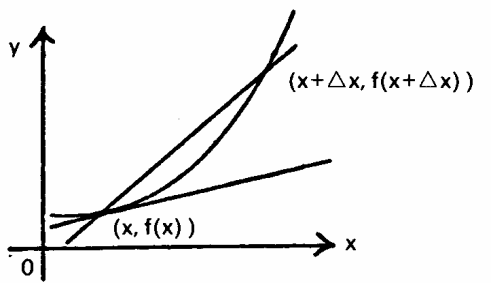
$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{p}{q}\right) \cdot \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}$$

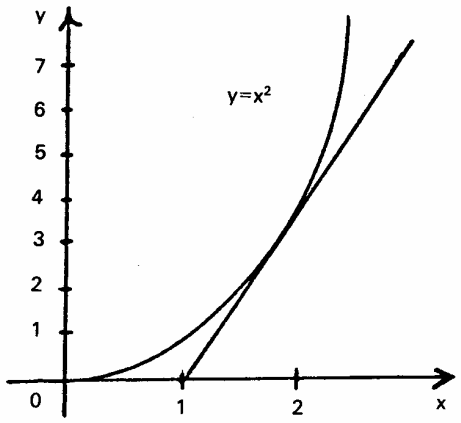
$$= \left(\frac{p}{q}\right) \cdot x^{\frac{p}{q}-1}$$

由此，可知当 n 是一有理数时，$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$ 亦成立。

内 容	时 间 分 配	教 学 建 议
5.3.3 *三角函数的微分*	3	在推出六个三角函数的导数之前，教师应先替学生温习三角函数的极限、复角公式或和积互变公式等。更应时常提醒学生所有角是以弧度为单位。sin x 的导数是可以如下推出： $\frac{d}{dx}[\sin x] = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ $= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\cdot\sin(\frac{h}{2})}{h}$ $= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$ $= \cos x \cdot 1$ $= \cos x$ 其它三角函数的导数是可以由基本原理推出，亦可以利用以上的公式和导数公式推出来，下列表示如何求 cos x 的导数： $\frac{d}{dx}[\cos x] = \frac{d}{dx}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]$ $= -\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ $= -\sin x$ 教师可让学生微分 tan x、cot x、sec x 和 cosec x 而得出下列的结果： $\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$ $\frac{d}{dx}[\cot x] = -\mathrm{cosec}^2 x$ $\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$
内 容	时 间 分 配	教 学 建 议

5.3.4 高阶导数	3	$\frac{d}{dx}[\text{cosec}\,x] = -\text{cosec}\,x\cot x$ 教师应提供足够的例题和练习来帮助学生应用上述的公式及其它导数的公式在简易代数和三角函数中，但是，反三角函数之微分并不须要。 高阶导数是可以由一阶导数 逐次 微分获得。已知一函数 $y = f(x)$ 可微分得其一阶导数 $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$，则 $f'(x)$ 的导数称为二阶导数并以 $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]$ 为记号。如此类推，n 阶导数亦可作类似义，教师应介绍传统的记号：$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right]$。 可介绍下列的例题： *例一* 已知 $x = a\sin(wt + k)$，其中 a，w 和 k 为常数，证明 $\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2x$ 。 *例二* 设 $f(\theta) = \sqrt{\theta^2 + k}\ \sin 2\theta$，其中 k 为常数。若 $f'(0) = 1$，求 k 的值。 *例三* 若 $y = a\sin x + \cos x$ 满足方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + y = b$，其中 a、b 为常数，且当 t = 0 时，$\frac{dy}{dx} = 2$，求 a、b 的值。
5.4 微分的应用 5.4.1 *曲线的斜率、切线及法线*	4	商差 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 可视为一连接函数 $y = f(x)$ 的图像中两点 (x, f(x))和(x + Δx, f(x + Δx))的弦线的斜率。当Δx 接近 0 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限值就是曲线上(x, f(x))这点的切线的斜率。

内 容	时间分配	教 学 建 议
		 教师可以利用一些简单图像，如 $y = x^2$ 、 $y = \frac{1}{x}$ 或 $x^2 + y^2 = 25$ 等作切线以说明。 *例一* 考虑曲线 $y = x^2$ 在 $x = 2$ 的切线。 在曲线 x=2 之处绘画一良好切线，其斜率是 4。教师应重申导函数在 x=2 时的值是可以由基本原理计出： $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = 4$ 其中的商差 $\frac{x^2 - 2^2}{x - 2}$ 正是一条连接曲线 $y = x^2$ 上点(2, 4)和变动点(x, x^2)的弦线的斜率。
内 容	时间分配	教 学 建 议



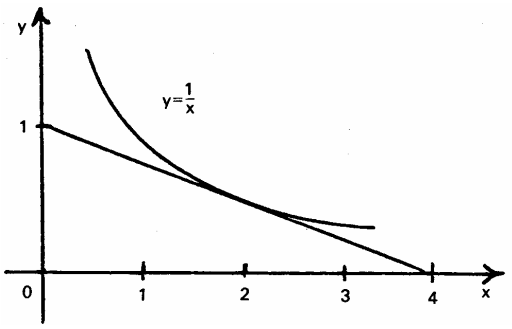
例二

考虑在图像 $y=\frac{1}{x}$ 上的切线。

从 $y=\frac{1}{x}$ 的图像中可以看出在 x=2 处的切线的斜率，其结果可以利用微分法验证：

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2}=-\frac{1}{x^2}\Bigg|_{x=2}=-\frac{1}{4}$$

内 容	时 间 分 配	教 学 建 议

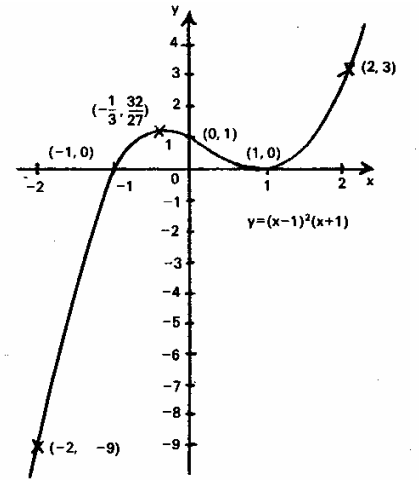
5.4.2 *极大及极小、简易曲线的描绘*	5	 当学生明了事实后，他们应能求得简单曲线的切线和法线。 在此课程，相对极值和绝对极值(最大/最小值)都应考虑。学生亦应可分辨相对和绝对极值。 教师应引导学生接受下列事实： (i) 若 $f'(x_1)>0$，则该函数在 x_1 处是递增的； (ii) 若 $f'(x_1)<0$，则该函数在 x_1 处是递减的； (iii) 若 $f'(x_1)=0$，则该函数在 x_1 处为一平稳点。 学生应清楚知道若 $f'(x_1)=0$ 且当 x 递增经 x_1 时，$f'(x)$ 的值由正变负，则 f(x)在 x_1 处为一相对极大值。若 $f'(x_1)=0$ 且当 x 递增经 x_1 时，$f'(x)$ 的值由负变正，则 f(x)在 x_1 处为一相对极小值。若二阶导数在 x_1 处不是零，则它亦可以决定 $f(x_1)$是一相对极大值或一相对极小值。若 $f'(x_1)=0$ 而且 $f''(x_1)<0$，则 f(x)在 x_1 处为一极大值。若 $f'(x_1)=0$ 而且 $f''(x_1)>0$，则 f(x)在 x_1 处为一极小值。教

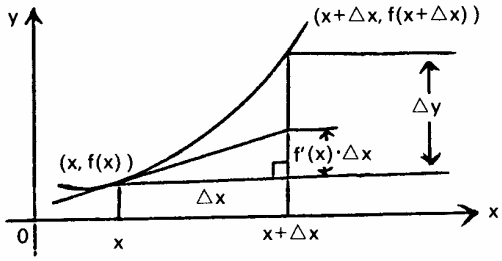
内 容	时 间 分 配	教 学 建 议

师应强调一阶及二阶导数皆可用来试验极点，但是，如果求一阶导数的导数过于困难的话，以一阶导数试点较为容易。

学生应注意到若某函数的定义域包含一端点，则该函数可能在该端点达致极值。

函数的一阶导数提供了一个方法去求函数的转向点(极大或极小)和函数是递增的或递减的区间。只要描绘了具有关连性的几点便可以决定函数曲线的形状。例如，描绘曲线 $y=(x-1)^2(x+1)$ 在 $-2\le x\le 2$ 区间内，教师应引导学生求曲线与两轴的交点和当 $\frac{dy}{dx}$ 是负值、零或正值时 x 的数值。学生计算了有关资料后，应不难描绘曲线如下：



内 容	时间分配	教 学 建 议
5.4.3 *变率*	2	教师应提醒学生将图像适当地注释。可让学生描绘的曲线包括 $y=\frac{x^2-2x+1}{x^2+2}$ 和 $y=\frac{4x-2}{x^2+4}$ 等。对较高能力的学生，教师可和他们讨论拐点和渐近线。 若 x 为一时间 t 的函数，则其导数 $\frac{dx}{dt}$ 为 x 对时间 t 的变率。速度和加速度是变率的好例子。有关变率的问题亦应讨论。以下为两个有关的例题。 *例一* 一倒置圆锥形的漏斗底半径为 30 cm，高为 40cm。水从漏斗的底部以 πcm^3s^{-1} 的速率流出。当水深为 20cm 时，求水面的下降速率。 *例二* 一身高 2 m 的人以 2 ms^{-1} 的速率沿着一直路背着一高 6 m 的灯而行。求此人影子增长的变率。
5.4.4 *微增量*	2	若 $y=f(x)$ 而Δx 为 x 的充份微小的增量，则由图可见 $\Delta y\approx f'(x)\Delta x$ 和 $f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta y\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$  教师应对指出如何应用微增量的概念来计算近似值和估计误差。

内 容	时间分配	教 学 建 议

		例一 已知 $\cos 60° = \frac{1}{2}$ ，利用微增量方法求 $\cos 61°$ 的近似值。 设 $f(x) = \cos x$ ，则 $f'(x) = -\sin x$ $x = 60° = \frac{\pi}{3}$ 弧度 $x = 1° = \frac{\pi}{180}$ 弧度 $\cos 61° = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right)$ $\approx \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right)$ $= 0.5 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)$ $\therefore \cos 61° \approx 0.485$ 教师应提醒学生变量 x 在函数 $f(x) = \cos x$ 应以弧度为单位。 *例二* 若量度一固体球体的半径时的百分误差为 0.1%并计算球体的体积，试估计体积的百分误差。
	36	